האוניברסיטה העברית בירושלים
החוג למתימטיקה

# בחינה בלוגיקה מתימטית (1) (32408)

## סמסטר הסתיו – תשס"ג – מועד א'

המורים: פרופ' אהוד הרושובסקי, פרופ' עזריאל לוי הזמן: שעתיים

הבחינה מחולקת לשני חלקים. על התלמיד לענות על כל חלקי השאלה בחלק א' ועל שתי שאלות בחלק ב'.

## חלק א': ענה על שאלה מס' 1

**1.** ענה בקצרה על השאלות א'-ד' הבאות. תשובה על כל אחת משאלות אלו צריכה להיות באורך של כחמש שורות לכל היותר.

א. נתון המשפט שלכל קבוצת פסוקים $\Gamma$ קונסיסטנטית במערכת ההיסק $\mathfrak{D}_0$ יש מודל. הוכח מכאן את משפט הקומפקטיות.

ב. תהי $L$ שפה של תחשיב היחסים. לפסוק $\phi$ של $L$ נסמן ב-$\mathrm{Models}(\phi)$ את קבוצת (מחלקת) המודלים של $\phi$. יהיו $A = \mathrm{Models}(\phi)$ ו- $B = \mathrm{Models}(\psi)$. הבע באמצעות $A$ ו-$B$ את $\mathrm{Models}(\phi \wedge \psi)$, את $\mathrm{Models}(\phi \vee \psi)$ ואת $\mathrm{Models}(\phi \to \psi)$.

ג. למשתנה x הגדר ברקורסיה על יצירת הנוסחה $\phi$ פונקציה $F$ על קבוצת הנוסחאות כך ש- $F(\phi) = 1$ אם x חופשי ב-$\phi$ ו- $F(\phi) = 0$ אחרת.

ד. תהי $L$ שפה של תחשיב היחסים שקבועיה היחידים הם סימן השוויון $\approx$ וסימן הפעולה החד-מקומי F.

(i) כמה מבנים יש ל-$L$ שעולמם הוא הקבוצה $\{0, 1\}$?

(ii) מהן מחלקות השקילות של יחס האיזומורפיזם בין מבנים אלו? כאשר הנך טוען ששני מבנים איזומורפיים הצבע רק על האיזומורפיזם ואל תוכיח שזה איזומורפיזם. לכל אחת ממחלקות האיזומורפיזם כתוב פסוק שהוא אמיתי בכל אחד מן המבנים במחלקה ואינו אמיתי ביתר המבנים, אולם אל תוכיח זאת.

## חלק ב': ענה על שתים מבין השאלות 2 עד 4 הבאות.

תשובותיך על השאלות צריכות לכלול הוכחות מלאות וברורות, אלא אם נאמר במפורש שאין צורך להוכיח. הקפד לצטט באופן מלא וברור את המשפטים בהם הנך משתמש. אם תענה על שלוש השאלות אז ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות.

**2.** תהי $\phi(\mathsf{c})$ הנוסחה המתקבלת מהצבת הקבוע האישי c עבור המשתנה x בנוסחה $\phi(\mathsf{x})$.
א. הבע את הערך $\mathrm{val}(\mathcal{A}, s, \phi(\mathsf{c}))$ (בסימון אחר, $\phi(\mathsf{c})^{\mathcal{A},s}$) של הנוסחה $\phi(\mathsf{c})$ במבנה $\mathcal{A}$ ובהשמה $s$ באמצעות הערך $\mathrm{val}(\mathcal{A}, s', \phi(\mathsf{x}))$ (בסימון אחר, $\phi(\mathsf{x})^{\mathcal{A},s'}$) של הנוסחה $\phi(\mathsf{x})$ במבנה $\mathcal{A}$ ובהשמה מתאימה $s'$.
ב. יהי $t$ שם עצם ו-$t(\mathsf{c})$ שם העצם המתקבל ממנו ע"י הצבת הקבוע האישי c עבור המשתנה x. נסח את הטענה המקבילה ל-א' עבור שם העצם $t(\mathsf{c})$.
ג. הוכח את השוויון המתקבל ב-א', כאשר מותר לך להניח את השוויון של ב'. בהוכחה זאת מותר לכך להשתמש בעובדות תחביריות (כלומר שאינן מתייחסות לערכי אמת) ידועות על פעולת ההצבה של קבוע אישי למשתנה, כל עוד אתה מנסח עובדות אלו בברור.

**3.** א. תהי $\Gamma$ קבוצת פסוקים בשפה $L$ שהיא קונסיסטנטית במערכת ההיסק $\mathfrak{D}_0$, ויהי $\phi$ פסוק כלשהו בשפה $L$. אז לפחות אחת הקבוצות $\Gamma \cup \{\phi\}$ ו- $\Gamma \cup \{\neg\phi\}$ היא קונסיסטנטית ב-$\mathfrak{D}_0$.
ב. תהיינה $\Gamma_i$, $i \in N$ קבוצות פסוקים בשפה $L$ שכל אחת מהן קונסיסטנטית במערכת ההיסק $\mathfrak{D}_0$, כך ש- $\Gamma_i \subseteq \Gamma_j$ כאשר $i < j$. הוכח כי הקבוצה $\bigcup_i^\infty \Gamma_i$ גם היא קונסיסטנטית ב-$\mathfrak{D}_0$.

**4.** תהי $L$ שפה לתחשיב הפסוקים שהפסוקים היסודיים בה הם $n$ הפסוקים $P_1, \ldots, P_n$ בלבד. מהו המספר המירבי $k$ כך שקיימת בשפה זאת סדרת פסוקים $\phi_1, \ldots, \phi_k$ כך שלכל $i < k$ $\phi_i \models \phi_{i+1}$ אולם לא $\phi_i \equiv \phi_{i+1}$? הוכח את טענתך.

**בהצלחה!**

האוניברסיטה העברית בירושלים
החוג למתימטיקה

# בחינה בלוגיקה מתימטית (1) (32408)

## סמסטר הסתיו – תשס"ג – מועד ב'

המורים: פרופ' אהוד הרושובסקי, פרופ' עזריאל לוי | הזמן: שעתיים

הבחינה מחולקת לשני חלקים. על התלמיד לענות על כל חלקי השאלה בחלק א' ועל שתי שאלות בחלק ב'.

## חלק א': ענה על שאלה מס' 1

**1.** ענה בקצרה על השאלות א'-ד' הבאות. תשובה על כל אחת משאלות אלו צריכה להיות באורך של כחמש שורות לכל היותר.

א. בצאתך מן המשפט שלכל קבוצת פסוקים קונסיסטנטית במערכת ההיסק $\mathfrak{D}_0$ יש מודל, הוכח שאם $\phi$ הוא פסוק אמיתי לוגית אז הוא יכיח ב-$\mathfrak{D}_0$.

ב. לשפת תחשיב היחסים אנו מוסיפים כמת מסוג חדש $\exists_2$ והגדרת הסמנטיקה שלו היא $\mathrm{val}(\boldsymbol{\mathcal{A}}, s, \exists_2 \mathsf{x}\phi) = \min_{a\in A}\max_{a\neq b\in A}\mathrm{val}(\boldsymbol{\mathcal{A}}, s\binom{\mathsf{x}}{b}, \phi)$ (ובסימון אחר $(\exists_2\mathsf{x}\phi)^{\boldsymbol{\mathcal{A}},s} = \min_{a\in A}\max_{a\neq b\in A}\phi^{\boldsymbol{\mathcal{A}},s\binom{x}{b}}$), היכן ש- $s\binom{\mathsf{x}}{b}$ היא ההשמה $s'$ הנתונה ע"י $s'(\mathsf{y}) = s(\mathsf{y})$ לכל משתנה y השונה מ-x, ו- $s(\mathsf{x}) = b$. נסח בשפה הרגילה של תחשיב היחסים פסוק שקול לפסוק $\exists_2\mathsf{x}\phi$.

ג. בשפה המכילה את הסימנים $\approx, \cdot, +$ **בלבד** כתוב נוסחה $\phi$ עם המשתנים החופשיים $\mathsf{x}, \mathsf{y}$ כך שבשדה הסדור של המספרים הממשיים הזוגות $(x, y)$ המקיימים את $\phi$ הם בדיוק זוגות הקואורדינטות של הנקודות על המחצית העליונה הסגורה של מעגל היחידה.

ד. הצבע על פסוק דואלי לכל אחד מן הפסוקים הבאים: (i) $P$, (ii) $P \wedge Q$, (iii) $P \to Q$, (iv) $\neg P$.

**מינוח:**

א. פסוק $\psi$ נקרא דואלי לפסוק $\phi$ אם לוח האמת $t_\psi$ של $\psi$ מתקבל מלוח האמת $t_\phi$ של $\phi$ ע"י הנוסחה $t_\psi(x_1, \ldots, x_n) = t_\neg(t_\phi(t_\neg(x_1), \ldots, t_\neg(x_n)))$, כאשר $t_\neg(\mathsf{T}) = \mathsf{F}$ ו- $t_\neg(\mathsf{F}) = \mathsf{T}$.

ב. הסימונים $\max$ ו-$\min$ מתייחסים לסידור של הקבוצה $\{\mathsf{F}, \mathsf{T}\}$ בו $\mathsf{F} < \mathsf{T}$.

## חלק ב׳: ענה על שתים מבין השאלות 2 עד 4 הבאות.

תשובותיך על השאלות צריכות לכלול הוכחות מלאות וברורות, אלא אם נאמר במפורש שאין צורך להוכיח. הקפד לצטט באופן מלא וברור את המשפטים בהם הנך משתמש. אם תענה על שלוש השאלות אז ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות.

**2.** תהי $L$ שפה המכילה לפחות קבוע אישי אחד ואינה מכילה סימני פעולה. תהי $\Gamma$ קבוצת פסוקים ב-$L$ שהיא עקבית (או קונסיסטנטית, אם הנך מעדיף זאת) ודעתנית (כלומר, לכל פסוק $\phi$ ב-$L$ $\phi \in \Gamma$ או $\neg\phi \in \Gamma$). הגדר מבנה $\mathcal{A}$ בעל התכונות הבאות, והוכח שהוא מקיים אותן.

א. כל פסוק אטומי הוא אמיתי ב-$\mathcal{A}$ אםם הוא נמצא ב-$\Gamma$.

ב. כל פסוק חסר כמתים הנמצא ב-$\Gamma$ הוא אמיתי ב-$A$.

ג. לכל פסוק $\psi$ שצורתו $\forall \mathsf{x}\phi$, היכן ש-$\phi$ היא נוסחה חסרת כמתים, אם $\psi \in \Gamma$ אז $\psi$ אמיתי ב-$A$.

**3.** תהי $\Gamma$ קבוצת פסוקים בשפה $L$ של תחשיב היחסים מסדר ראשון שהיא קונסיסטנטית במערכת ההיסק $\mathfrak{D}_0$. יהי $\exists \mathsf{x}\phi(\mathsf{x})$ פסוק ב-$L$ ו-$\mathsf{c}$ קבוע אישי שאינו ב-$L$. אז קבוצת הפסוקים $\Gamma \cup \{\exists \mathsf{x}\phi(\mathsf{x}) \to \phi(\mathsf{c})\}$ גם היא קונסיסטנטית.

**4.** א. נתונים האלגוריתמים הבסיסיים לטיפול במחרוזות ובפסוקים כגון אלגוריתם המפרק מחרוזת נתונה $\phi$ לסדרת ביטויים $\phi_1, \ldots, \phi_n$, אלגוריתם העונה על השאלה אם מחרוזת $\phi$ היא פסוק, ואלגוריתם המפרק פסוק לרכיביו. תאר, מבלי להכנס לפרטי פרטים אלגוריתם לבדיקה אם מחרוזת $\phi$ נתונה היא הוכחה במערכת ההיסק $\mathfrak{D}_0$.

ב. הוכח כי קבוצת כל הפסוקים היכיחים במערכת ההיסק $\mathfrak{D}_0$ מפסוק $\psi$ היא כריעה חיובית.

ג. יהי $\mathcal{A}$ מבנה ו-$\psi$ פסוק כך שהפסוקים האמיתיים ב-$\mathcal{A}$ הם בדיוק הפסוקים היכיחים מ-$\psi$ ב-$\mathfrak{D}_0$. הוכח כי קבוצת הפסוקים האמיתיים ב-$\mathcal{A}$ היא כריעה.

בהצלחה!

האוניברסיטה העברית בירושלים
החוג למתימטיקה

# בחינה בלוגיקה מתימטית (1) (32408)

סמסטר הסתיו – תשס"ג – מועד ג'

המורים: פרופ' אהוד הרושובסקי, פרופ' עזריאל לוי    הזמן: שעתיים

הבחינה מחולקת לשני חלקים. על התלמיד לענות על כל חלקי השאלה בחלק א' ועל שתי שאלות בחלק ב'.

## חלק א': ענה על שאלה מס' 1

**1**. ענה בקצרה על השאלות א'-ד' הבאות. תשובה על כל אחת משאלות אלו צריכה להיות באורך של כחמש שורות לכל היותר.

א. יהי P סימן יחס חד מקומי. נסח בשפת המספרים הממשיים, שהיא שפת השדות הסדורים, בתוספת סימן היחס החד-מקומי P את הטענה שהקבוצה ש-P מייצג מקיימת את תכונת החסם העליון (כלומר, אם היא חסומה מלעיל אז יש לה חסם עליון, המוגדר כחסם מלעיל מזערי).

ב. נתון משפט הקומפקטיות של תחשיב היחסים מסדר ראשון ונתון שכל פסוק אמיתי לוגית יכיח במערכת ההיסק $\mathfrak{D}_0$. הוכח שלכל קבוצת פסוקים $\Gamma$ קונסיסטנטית ב-$\mathfrak{D}_0$ יש מודל.

ג. הגדר ברקורסיה על יצירת הנוסחה $\phi$ את תוצאת ההצבה $\mathrm{sub}(\phi, \mathsf{x}, \mathsf{c})$ של הקבוע האישי c עבור המשתנה x בנוסחה $\phi$.

ד. תהי $L$ שפה של תחשיב היחסים שקבועיה היחידים הם סימן השוויון $\approx$ וסימן היחס הדו-מקומי R.

(i) כמה מבנים יש ל-$L$ שעולמם הוא הקבוצה $\{0, 1\}$?

(ii) מהן מחלקות השקילות של יחס האיזומורפיזם בין מבנים אלו? כאשר הנך טוען ששני מבנים איזומורפיים הצבע רק על האיזומורפיזם ואל תוכיח שזה איזומורפיזם. לכל אחת ממחלקות האיזומורפיזם כתוב פסוק שהוא אמיתי בכל אחד מן המבנים במחלקה ואינו אמיתי ביתר המבנים, אולם אל תוכיח זאת.

## חלק ב׳: ענה על שתים מבין השאלות 2 עד 4 הבאות.

תשובותיך על השאלות צריכות לכלול הוכחות מלאות וברורות, אלא אם נאמר במפורש שאין צורך להוכיח. הקפד לצטט באופן מלא וברור את המשפטים בהם הנך משתמש. אם תענה על שלוש השאלות אז ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות.

**2.** א. יהיו $\mathcal{A}$ ו-$\mathcal{B}$ מבנים לשפה $L$ של תחשיב היחסים. מתי מבנים אלו נקראים איזומורפיים? הגדר.

ב. תהי $L$ שפה של תחשיב היחסים מסדר ראשון ללא סימני פעולה וללא קבועים אישיים, ויהיו $\mathcal{A}$ ו-$\mathcal{B}$ מבנים איזומורפיים בשפה זאת. הוכח שאותם הפסוקים של $L$ אמיתיים בשני המבנים.

**3.** תהי $\Gamma$ קבוצת פסוקים בשפה $L$ של תחשיב היחסים מסדר ראשון שהיא קונסיסטנטית במערכת ההיסק $\mathfrak{D}_0$. יהי $\forall x\phi(x)$ פסוק ב-$L$ ו-c קבוע אישי שאינו ב-$L$. אז קבוצת הפסוקים $\Gamma \cup \{\phi(c) \rightarrow \forall x\phi(x)\}$ גם היא קונסיסטנטית.

**4.** תהי $\Gamma$ קבוצת פסוקים בתחשיב היחסים מסדר ראשון שאין לה מודל אינסופי. הוכח של-$\Gamma$ יש תת-קבוצה סופית $\Delta$ שגם לה אין מודל אינסופי.

בהצלחה!